

Übungsblatt 2

2.1 Klein-Paradoxon für Spin-0 Teilchen

Wir betrachten das Problem einer Potentialstufe für ein spinloses Teilchen der Ladung q und der Masse m .

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 & I \\ V_0 & , x \geq 0 & II \end{cases}$$

a) Klein-Gordon-Gleichung im Bereich I ohne Feld:

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \psi = 0$$

Im Bereich II Umeichung mit $i\hbar\partial^\mu \rightarrow i\hbar\partial^\mu - \frac{q}{c}A^\mu$. Wegen $A^\mu = (\Phi(x), 0, 0, 0)$ erfolgt die Umeichung nur für die 0-te Komponente, \Rightarrow Klein-Gordon-Gleichung im Bereich II mit Feld V_0 :

$$\left(\left(\partial_0 - \frac{q}{i\hbar c} A^0 \right)^2 - \Delta + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \psi = 0$$

b) Lösungsansatz:

$$\begin{aligned} \psi_{<}(x < 0) &= e^{-i\omega t} (e^{ikx} + Re^{-ikx}) \\ \psi_{>}(x \geq 0) &= Te^{-i\omega t} e^{ik'x} \end{aligned}$$

zz: mit $p = \hbar k$, $p' = \hbar k'$ und $E = \hbar\omega$

$$p = \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2} \quad p' = \pm \sqrt{\frac{(E - V_0)^2}{c^2} - m^2 c^2}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \psi_{<} \\ &= \left(\partial_0 \partial^0 - \Delta + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) e^{-i\omega t} (e^{ikx} + Re^{-ikx}) \\ &= \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) e^{-i\omega t} (e^{ikx} + Re^{-ikx}) \\ \Leftrightarrow 0 &= -\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \\ &= -\frac{\omega^2 \hbar^2}{c^2} + k^2 \hbar^2 + m^2 c^2 \\ \Leftrightarrow p^2 &= \frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2 \\ \Leftrightarrow p &= \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\left(\partial_0 - \frac{q}{i\hbar c} A^0 \right)^2 - \Delta + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \psi_{>} \\
&= \left(\left(\partial_0 - \frac{q}{i\hbar c} A^0 \right)^2 - \Delta + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) T e^{-i\omega t} e^{ik'x} \\
&= \left(-\frac{(E - V_0)^2}{c^2} + k'\hbar^2 + (mc)^2 \right) T e^{-i\omega t} e^{ik'x} \\
\Leftrightarrow 0 &= -\frac{(E - V_0)^2}{c^2} + p'^2 + (mc)^2 \\
\Leftrightarrow p' &= \pm \sqrt{\frac{(E - V_0)^2}{c^2} - (mc)^2}
\end{aligned}$$

c)

$$p' = \pm \sqrt{\frac{(E - V_0)^2}{c^2} - (mc)^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{(E - V_0)}{c} - mc \right) \left(\frac{(E - V_0)}{c} + mc \right)}$$

Wir betrachten nun die verschiedenen Fälle von V_0 :

- *strong* $V_0 > E + mc^2 \Rightarrow p'$ ist reel. Aus der Gruppengeschwindigkeit $V_g = \frac{p'}{E - V_0} = \frac{-p'}{-mc^2}$ folgt, da V_g immer positiv sein muss: $p' < 0$
- *intermediate* $E - mc^2 < V_0 < E + mc^2 \Rightarrow p'$ ist imaginär
- *weak* $V_0 < E - mc^2 \Rightarrow p'$ ist reel. Aus der Positivität der Gruppengeschwindigkeit ergibt sich, dass $p' > 0$

d) Berechnung von R und T mit Hilfe der Stetigkeitsbedingungen

$$\psi_{<}(0) = \psi_{>}(0) \quad \psi'_{<}(0) = \psi'_{>}(0)$$

$$\begin{aligned}
e^{-i\omega t} (e^{ik_0} + R e^{-ik_0}) &= T e^{-i\omega t} e^{ik'_0} \\
\Leftrightarrow 1 + R &= T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi'_{<}(x < 0) &= e^{-i\omega t} (ik e^{ikx} + (-ik) R e^{-ikx}) \\
\psi'_{>}(x \geq 0) &= ik' T e^{-i\omega t} e^{ik'x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{-i\omega t} (ik e^{ik_0} + (-ik) R e^{-ik_0}) &= ik' T e^{-i\omega t} e^{ik'_0} \\
\Leftrightarrow ik - ikR &= ik'T \\
\Leftrightarrow T &= \frac{k}{k'} (1 - R)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2k}{k' + k} \quad R = \frac{k - k'}{k + k'}$$

e) Reflexionskoeffizient $\rho = 1 - j_{<}/j_{in}$
 Transmissionskoeffizient $\tau = j_{>}/j_{in}$
 mit $j_{in} = p/m$ und $j_x = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^* \partial_x \psi - \psi \partial_x \psi^*)$

Berechnung des Reflexionskoeffizienten: (! k ist reel)

$$\begin{aligned}
 \rho = 1 - j_{<}/j_{in} &= 1 - \frac{\hbar}{2mi}(\psi_{<}^* \partial_x \psi_{<} - \psi_{<} \partial_x \psi_{<}^*) \cdot m/p \\
 &= 1 - \frac{\hbar}{2mi} \left\{ e^{i\omega t} (e^{-ikx} + Re^{ikx}) \cdot (e^{-i\omega t} (ike^{ikx} + (-ik)Re^{-ikx})) \right. \\
 &\quad \left. - e^{-i\omega t} (e^{ikx} + Re^{-ikx}) (e^{i\omega t} ((-ik)e^{-ikx} + ikRe^{ikx})) \right\} \cdot m/p \\
 &= 1 - \frac{\hbar}{2mi} \{2ik(1 - |R|^2)\} \cdot m/p \\
 &= 1 - \frac{\hbar k}{p}(1 - |R|^2) \cdot \\
 &= 1 - 1 + |R|^2 \\
 &= |R|^2
 \end{aligned}$$

Berechnung des Transmissionskoeffizienten: (analoge Vorgehensweise, jedoch ist k' nicht unbedingt reel)

$$\begin{aligned}
 \tau = j_{>}/j_{in} &= \frac{\hbar}{2mi}(\psi_{>}^* \partial_x \psi_{>} - \psi_{>} \partial_x \psi_{>}^*) \cdot m/p \\
 &= \frac{\hbar}{2mi} \left\{ T^* e^{i\omega t} e^{-ik'^*x} ik' T e^{-i\omega t} e^{ik'x} - T e^{-i\omega t} e^{ik'x} T^* e^{i\omega t} (-ik'^*) e^{-ik'^*x} \right\} \cdot m/p \\
 &= \frac{\hbar m}{2mip} i(k' + k'^*) |T|^2 e^{-i(k'^* - k')x} \\
 &= |T|^2 \frac{\hbar(k' + k'^*)}{2p} e^{-i(k'^* - k')x}
 \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die unterschiedlichen Fälle für p und damit für k :

- p' ist reel $\Rightarrow k' = k'^* \Rightarrow \tau = \pm |T|^2 \frac{|p'|}{p}$
- p' ist imaginär $\Rightarrow k'^* = -k'$. Dann ist $\tau = 0$. Keine Transmissionen, der komplette Strahl wird reflektiert.

f) zz: Für $\left[(\partial_t + \frac{i}{\hbar} q\phi(x))^2 - c^2 \partial_x^2 + \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right)^2 \right] \psi(x, t) =: D(x, t) \psi(x, t) = 0$ gilt: $D(x, -t) \psi^*(x, t) = 0$.

$$\begin{aligned}
 D(x, t) \psi(x, t) &= \left[\left(\partial_t + \frac{i}{\hbar} q\phi(x) \right)^2 - c^2 \partial_x^2 + \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right)^2 \right] \psi(x, t) \\
 D(x, -t) \psi^*(x, t) &= \left[\left(\partial_t + \frac{-i}{\hbar} q\phi(x) \right)^2 - c^2 \partial_x^2 + \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right)^2 \right] \psi(x, t)
 \end{aligned}$$

2.2 Landau-Niveaus eines Teilchens ohne Spin in einem Magnetfeld

Potential $A^\mu = (0, -By, 0, 0) = (0, \vec{A})$ es existiert ein endliches Magnetfeld $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

a) Schrödinger-Gleichung für spinloses Teilchen der Ladung q im Potential A^μ

$$i\hbar\partial_t\psi = \frac{1}{2m} \left(p - \frac{q}{c}A\right)^2 \psi$$

Klein-Gordon-Gleichung für spinloses Teilchen der Ladung q im Potential A^μ , Umformung wie in 2.1 mit $i\hbar\partial^\mu \rightarrow i\hbar\partial^\mu - \frac{q}{c}A^\mu$

$$\left\{ \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \left(\nabla + \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \right\} \psi = 0$$

$$\Leftrightarrow \hbar^2\partial_t^2\psi = \left(c^2\hbar^2\left(\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 - m^2c^4\right)\psi$$

b) Das Potential hängt nicht von z oder x ab, daher gilt $[H, p_{x,z}] = 0$. Daher kann man einen "Separationsansatz" machen mit

$$\psi(\vec{x}, t) = e^{-i\omega t} e^{ik_x x} e^{ik_z x} \phi(y)$$

c) Kinetischer Impuls in x -Richtung: $\Pi_x = \left(p_x - \frac{q}{c}A_x\right)^2$ angewendet auf ψ ergibt:

$$\begin{aligned} \Pi_x\psi &= \left(p_x - \frac{q}{c}A_x\right)^2 e^{-i\omega t} e^{ik_x x} e^{ik_z x} \phi(y) \\ &= \left(-i\hbar k_x + \frac{q}{c}By\right)^2 e^{-i\omega t} e^{ik_x x} e^{ik_z x} \phi(y) \\ &= \underbrace{\left(\frac{Bq}{c}\right)^2}_{m^2\omega^2} \underbrace{\left(\frac{\hbar k_x c}{Bq} + y\right)^2}_{-y_0} \psi \\ &\propto (y - y_0)^2 \psi \end{aligned}$$

Dabei ist $y_0 = -\frac{\hbar k_x c}{Bq}$ Wir sehen eine Ähnlichkeit zum harmonischen Oszillator.

d) Schrödinger-Fall:

$$\begin{aligned} E\psi &= H\psi \\ &= \left(\frac{p_x}{2m} + \frac{p_y}{2m} + \frac{p_z}{2m}\right)\psi \\ &= \left(\frac{m^2\omega^2(y - y_0)^2}{2m} + \frac{p_y}{2m} + \frac{p_z}{2m}\right)\psi \\ \Leftrightarrow \left(E - \frac{p_z}{2m}\right)\psi &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_y^2 + \frac{m\omega^2(y - y_0)^2}{2}\right)\psi \end{aligned}$$

Wie wir erkennen können, handelt es sich dabei auf der rechten Seite um die Form eines Harmonischen Oszillators, dessen Energieeigenwerte wir kennen \rightarrow

$$E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{p_z^2}{2m}$$

Klein-Gordan-Fall:

die KG-Gleichung lässt sich zu $\left(\frac{1}{2m}p^2 - \frac{mc^2}{2}\right)\psi = 0$ umformen.

Mit $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \Leftrightarrow m^2 c^2 = \vec{p}^2 - \frac{E^2}{c^2} = -p^2$ folgt dann

$$\begin{aligned} \left(\frac{E^2}{2mc^2} - \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{mc^2}{2}\right)\psi &= 0 \\ \left(\frac{E^2}{2mc^2} - \frac{mc^2}{2}\right)\psi &= \frac{\vec{p}^2}{2m}\psi \\ &= \left(\frac{p_x}{2m} + \frac{p_y}{2m} + \frac{p_z}{2m}\right)\psi \end{aligned}$$

Ersetzen wir nun p_x und p_y analog zum Schrödingerfall erhalten wir für die Energie:

$$E^2 = (mc^2)^2 + p_z c^2 + 2mc^2 \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

In beiden Fällen gilt:

- Bewegung parallel zum \vec{B} -Feld: freie Bewegung
- Bewegung senkrecht zum \vec{B} -Feld: quantisierte Bewegung

2.3 Lorentztransformation eines elektromagnetischen Potentials

Wir betrachten das 4-er Potential $A^\mu = (\phi(x, t), a(x, t), 0, 0)$

a) mit

$$L^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

folgt:

$$A'^\mu = \begin{pmatrix} \gamma\phi(L^{-1}x) + \gamma\beta a(L^{-1}x) \\ \gamma a(L^{-1}x) + \gamma\beta\phi(L^{-1}x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $a(x) = 0$ Also folgt für A' :

$$A'^\mu = \begin{pmatrix} \gamma\phi(L^{-1}x) \\ \gamma\beta\phi(L^{-1}x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

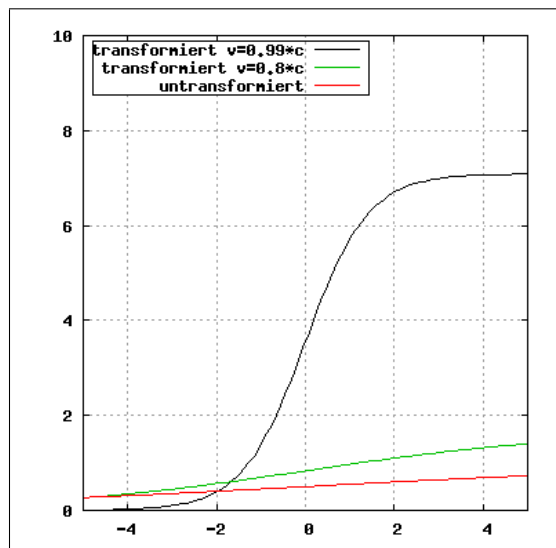
Wegen

$$\nabla \times \begin{pmatrix} \gamma\beta\phi(L^{-1}x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

existiert ein \vec{B} -Feld.

c) Man erhält aus 2.3b):

$$\phi(x) = \frac{1}{e^{-x/b} + 1} \Rightarrow \phi'(x') = \frac{\gamma}{e^{-\gamma x/b} + 1}$$



2.4 Dirac-Matrizen

Dirac-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = (-i\hbar c \alpha^k \frac{\partial}{\partial k^+} + \beta m c^2) \psi$$

mit den Dirac-Matrizen

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

a) zz: $\{\alpha^i, \alpha^j\} = 2\delta^{ij} \mathbb{1}$

$$\begin{aligned} \{\alpha^i, \alpha^j\} &= \alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma^i \sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^i \sigma^j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma^j \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^j \sigma^i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \{\sigma^i, \sigma^j\} & 0 \\ 0 & \{\sigma^i, \sigma^j\} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\delta^{ij} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 2\delta^{ij} \mathbb{1} \end{pmatrix} \\ &= 2\delta^{ij} \mathbb{1} \end{aligned}$$

$$\text{zz: } \{\alpha^i, \beta\} = 0$$

$$\begin{aligned} \{\alpha^i, \beta\} &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Wegen $2(\alpha^i)^2 = \{\alpha^i, \alpha^i\} = 2\mathbb{1}$ folgt $(\alpha^i)^2 = \mathbb{1}$ und damit für die Eigenwerte $\lambda^i = \pm 1$. Wegen $0 \stackrel{i \neq j}{=} \{\alpha^i, \alpha^j\}$ ist $\text{tr}(\alpha^i) = 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \text{tr}(\alpha^i) &= \sum_{i=0}^d \lambda^i \\ &= \sum_{i=0}^d \pm 1 \\ \Rightarrow d &\text{ gerade} \end{aligned}$$

Die einzigen spurfreien Matrizen, die sich finden lassen für $d=2$ sind die Pauli-Matrizen. Es sind allerdings nur drei und nicht vier, wie benötigt. Es lässt sich keine weitere 2×2 -Matrix finden, die spurfrei ist. $\Rightarrow d \geq 4$ und d gerade.

b)

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\psi &= (-i\hbar c\alpha^k\partial_k + \beta mc^2)\psi & | \cdot \beta \\ i\hbar\beta\partial_t\psi &= (-i\hbar c\beta\alpha^k\partial_k + \beta^2 mc^2)\psi \\ i\hbar\gamma^0\partial_t\psi &= (-i\hbar c\gamma^k\partial_k + \mathbb{1}mc^2)\psi \\ i\hbar\gamma^0\frac{\partial}{\partial x^0}\psi &= (-i\hbar c\gamma^k\partial_k + \mathbb{1}mc^2)\psi \\ \Leftrightarrow 0 &= (-i\hbar c\gamma^\mu\partial_\mu + mc^2\mathbb{1})\psi \end{aligned}$$

$$\boxed{0 = (-i\gamma^\mu\partial_\mu + \frac{mc}{\hbar}\mathbb{1})\psi}$$

zz. $(\gamma^0)^+ = \gamma^0$ und $(\gamma^k)^+ = -\gamma^k$ Wir wissen, dass α^i und β hermitesch sind. Diese Eigenschaft folgt aus den Eigenschaften der Pauli-Matrizen.

$$\begin{aligned} (\gamma^0)^+ &= \beta^+ = \beta = \gamma^0 \\ (\gamma^k)^+ &= (\beta\alpha^k)^+ = (\alpha^k)^+\beta^+ = \alpha^k\beta = -\beta\alpha^k = -\gamma^k \end{aligned}$$

$$\text{zz: } \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}$$

$$\begin{aligned} \{\gamma^0, \gamma^0\} &= \{\beta, \beta\} \\ &= \beta^2 + \beta^2 \\ &= g^{00} 2 \cdot \mathbb{1} \\ \{\gamma^0, \gamma^i\} &= \{\beta, \beta\alpha^i\} \\ &= \beta\beta\alpha^i + \beta\alpha^i\beta \\ &= \alpha^i - \alpha^i \\ &= 0 \\ &= \{\gamma^i, \gamma^0\} \\ \{\gamma^i, \gamma^j\} &= \{\beta\alpha^i, \beta\alpha^j\} \\ &= \beta\alpha^i\beta\alpha^j + \beta\alpha^j\beta\alpha^i \\ &= -\beta^2\alpha^i\alpha^j - \beta^2\alpha^j\alpha^i \\ &= -\{\alpha^i, \alpha^j\} \\ &= g^{ij} \{\alpha^i, \alpha^j\} \\ &= g^{ij} 2\delta^{ij} \mathbb{1} \\ &= 2g^{ij} \mathbb{1} \\ \Rightarrow \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} \mathbb{1} \end{aligned}$$

c) zz. Für $\gamma'_\mu = A\gamma_\mu A^{-1}$ gilt $\{\gamma'^\mu, \gamma'^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}$ wenn γ_{mu} Dirac-Matrizen.

$$\begin{aligned} \{\gamma'^\mu, \gamma'^\nu\} &= \{A\gamma_\mu A^{-1}, A\gamma_\nu A^{-1}\} \\ &= A\gamma_\mu A^{-1} A\gamma_\nu A^{-1} + A\gamma_\nu A^{-1} A\gamma_\mu A^{-1} \\ &= A\gamma_\mu \gamma_\nu A^{-1} + A\gamma_\nu \gamma_\mu A^{-1} \\ &= A \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} A^{-1} \\ &= A 2g^{\mu\nu} \mathbb{1} A^{-1} \\ &= 2g^{\mu\nu} \mathbb{1} \end{aligned}$$

zz: die Matrizen A sind eindeutig bis auf einen konstanten Faktor. Dieser Beweis scheint etwas zu hinken, dennoch:

$$\begin{aligned} \gamma'_\mu &= B\gamma_\mu B^{-1} \\ \Rightarrow \gamma_\mu &= A^{-1}\gamma'_\mu A \\ \Rightarrow \gamma'_\mu &= BA^{-1}\gamma'_\mu AB^{-1} \\ \Rightarrow A &= bB \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{b}A \end{aligned}$$